Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Sigmund Selberg tlf. 40043660

EKSAMEN I TMA4105 MATEMATIKK 2

Bokmål
15 august 2009
kl.9-13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 4. september 2009

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 En trekantet plate R i xy-planet med massetetthet $\delta(x,y) = 1$ har hjørner i punktene $(0,0)$, $(1,-1)$ og $(1,2)$. Beregn treghetsmomentet til R med hensyn på x-aksen.

(Treghetsmomentet til et massepunkt med hensyn på en akse L er lik produktet av punktets masse og kavdratet av punktets avstand til L.)

Oppgave 2 Finn en likning for tangentplanet til hyperboloiden

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$$

i punktet $(2,1,3)$.

Oppgave 3 Et massepunkt med masse m beveger seg i et kraftfelt

$$\mathbf{G}(x, y, z) = m(-x\mathbf{i} - y\mathbf{j})$$

langs en kurve C slik at posisjonen (x, y, z) ved tidspunkt t er gitt ved

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 2t \quad \text{for } 0 \le t < 4\pi.$$

a) Vis at summen $\mathbf{F}$ av alle krefter som virker på massepunktet under bevegelsen langs C er $\mathbf{F} = \mathbf{G}$. Hint: Newtons andre lov sier at $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Hvilken starthastighet $\mathbf{v}(0)$ må massepunktet settes igang med for at den skal følge C?

b) Bestem komponentene av $\mathbf{G}$ som gir henholdsvis fartsendring og retningsendring for massepunktet.

c) Finn arbeidet som $\mathbf{G}$ utfører under bevegelsen.

Oppgave 4 La S være den delen av flaten

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

som ligger i første oktant, under planet $z = 2$.

Beregn arealet av S.

Oppgave 5 La S være flaten gitt ved

$$S: \qquad z = 4 - x^2 - y^2 \quad \text{for } \ 0 \le z \le 3,$$

og la $\mathbf{n}$ være enhetsnormalen til S som peker vekk fra z-aksen.

a) Beregn integralet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

ved hjelp av divergensteoremet, der $\mathbf{F}$ er vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{y \sin z}\mathbf{i} + (y^2/2 + e^{x \sin z})\mathbf{j} + (z^2 - yz)\mathbf{k}.$$

b) Beregn integralet

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

når $\mathbf{G}$ er vektorfeltet

$$\mathbf{G}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\sqrt{z^2 + 1}\,\mathbf{k}.$$

Oppgave 6 En ingeniør skal beregne temperaturen T i et gitt punkt (x_0, y_0, z_0) ved hjelp av formelen

$$T = f(x, y, z) = xz\,e^{2y}.$$

Ved måling har han/hun funnet at $x_0 \approx 1$, $y_0 \approx \ln 2$ og $z_0 \approx 8$. Han/hun bruker derfor $f(1, \ln 2, 8)$ som anslag for temperaturen i (x_0, y_0, z_0). Bestem $f(1, \ln 2, 8)$.

Målingene er beheftet med målefeil. Målefeilen er her maksimalt 0.1 i absoluttverdi for hver av de tre målingene. Anslå maksimal feil i anslaget $f(1, \ln 2, 8)$ for temperaturen i (x_0, y_0, z_0) ved hjelp av lineær approksimasjon.

FORMELLISTE

Dekomponering av akselerasjonsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\,\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\,\mathbf{N}(t)$$

Diskriminanten i annenderiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx},\ \ B = f_{xy},\ \ C = f_{yy}$$

Koordinatsystemer:

Sylinderkoordinater $(r,\ \theta,\ z)$:

$$x = r\ \cos\theta, \quad y = r\ \sin\theta, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

Kulekoordinater $(\rho,\ \varphi,\ \theta)$:

$$x = \rho\ \sin\varphi\ \cos\theta, \quad y = \rho\ \sin\varphi\ \sin\theta, \quad z = \rho\ \cos\varphi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

Flateintegral:

$$d\sigma = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\ du\,dv$$

For graf $z = f(x,y)$: $\quad d\sigma = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy$

Tyngdepunkt for romlige legemer:

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iiint_T x\,dm, \quad \overline{y} = \frac{1}{M}\iiint_T y\,dm, \quad \overline{z} = \frac{1}{M}\iiint_T z\,dm \quad (dm = \delta\,dV)$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$